

Ispit iz Matematike 1, Hemija, oktobar 2012

1. Ispitati konvergenciju reda $\sum \left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{n^2}$

2. Odrediti sve lokalne ekstremume funkcije $f(x) = x^3 e^{-\frac{x^2}{6}}$.

3. Izračunati integral $\int x^2 e^{3x} dx$.

4. Rešiti diferencijalnu jednačinu: $(xy^2 + 3x)dx + (2x^2y - 5y)dy = 0$

5. Strelac koji ima 4 metka gađa u metu dok je ne pogodi ili ne utroši sve metke. Broj utrošenih metaka je slučajna promenljiva X. Verovatnoća pogodka pri svakom gađanju je 0.8.

(a) Odrediti raspodelu verovatnoća slučajne promenljive X.

(b) Odrediti matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive X.

Ispit iz Matematike 1, Hemija, oktobar 2012

1. Ispitati konvergenciju reda $\sum \left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{n^2}$

2. Odrediti sve lokalne ekstremume funkcije $f(x) = x^3 e^{-\frac{x^2}{6}}$.

3. Izračunati integral $\int x^2 e^{3x} dx$.

4. Rešiti diferencijalnu jednačinu: $(xy^2 + 3x)dx + (2x^2y - 5y)dy = 0$

5. Strelac koji ima 4 metka gađa u metu dok je ne pogodi ili ne utroši sve metke. Broj utrošenih metaka je slučajna promenljiva X. Verovatnoća pogodka pri svakom gađanju je 0.8.

(a) Odrediti raspodelu verovatnoća slučajne promenljive X.

(b) Odrediti matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive X.

Rešenje:

1. Konvergira. Košijev kriterijum:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{(n-2)^{n^2}}{(n+3)^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+3}\right)^n = 1^\infty = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n}{n+3}} = e^{-5} < 1$$

2. Domen $D=\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 e^{-\frac{x^2}{6}} + x^3 e^{-\frac{x^2}{6}} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot 2x = 3x^2 e^{-\frac{x^2}{6}} - \frac{1}{3} x^4 e^{-\frac{x^2}{6}} = x^2 e^{-\frac{x^2}{6}} \left(3 - \frac{1}{3} x^2\right) = x^2 e^{-\frac{x^2}{6}} \left(\frac{9-x^2}{3}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \vee x = 3$$

$$\text{MIN}(-3, -27e^{-\frac{9}{2}}), \text{MAX}(3, 27e^{-\frac{9}{2}})$$

3. $I = \int x^2 e^{3x} dx$

Nakon parcijalne: $u = x^2, du = 2x dx, dv = e^{3x} dx, v = \frac{1}{3} e^{3x}$

$$I = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx$$

Jos jednom parcijalna: $u = x, du = dx, dv = e^{3x} dx, v = \frac{1}{3} e^{3x}$

$$I = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C.$$

4.

$$(2x^2 y - 5y) dy = -(xy^2 + 3x) dx$$

$$y(2x^2 - 5) dy = -x(y^2 + 3) dx$$

$$\frac{y dy}{y^2 + 3} = \frac{-x dx}{2x^2 - 5} \text{ je jednačina sa razdvojenim prom.}$$

$$\int \frac{y}{y^2 + 3} dy = - \int \frac{x}{2x^2 - 5} dx$$

Nakon rešavanja integrala:

$$\frac{1}{2} \ln|y^2 + 3| = -\frac{1}{4} \ln|2x^2 - 5| + \ln C$$

$$\ln|y^2 + 3|^2 = \ln|C(2x^2 - 5)^{-1}|$$

$$(y^2 + 3)^2 = \frac{C}{2x^2 - 5}$$

5.

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.8 & 0.16 & 0.032 & 0.008 \end{pmatrix}$$

$$P(X = 1) = 0.8$$

$$P(X = 2) = (1 - 0.8)0.8 = 0.16$$

$$P(X = 3) = (1 - 0.8)(1 - 0.8)0.8 = 0.032$$

$$P(X = 4) = (1 - 0.8)^3 0.8 + (1 - 0.8)^4 = 0.008$$